⋆

Exercice 1 **Voir correction**

On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes U, V, W suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α, β, γ. On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$

1) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$ (classique).
2) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$

⋆ ⋆

Exercice 2 **Voir correction**

(D'après écrit ENS 2022)
Premier jeu On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 et si elle tombe sur face, on perd 10. On recommence un certain nombre de fois avec des lancés que l'on suppose indépendants.
Pour $i \geq 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i-ème pièce tombe ssur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

1) Calculer l'espérance $E(X_i)$ de X_i, pour $i \geq 1$.

On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu après n lancés.

2) a) Pour $n \geq 1$, exprimer S_n en fonction des X_i, $i \geq 1$.
   b) Calculer la probabilité $P(S_2 = k)$ pour tout entier k.
   c) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E(S_n)$.
3) a) Montrer que $P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{2}{3}$
   b) Montrer que $P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$

On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès lors que le montant S_n devient inférieur ou égal à 89 ou supérieur ou égal à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.

4) a) Calculer $P(T = 1)$
   b) Calculer $P(T = 2)$
   c) Si $T \geq 3$, que vaut S_2 ?
   d) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré 3 pièces ou moins ?
   e) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égal à 105 ?

Second jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11% de notre montant actuel et si elle tombe sur face, on perd 10% de notre montant actuel. On recommence un certain nombre de fois avec des lancés que l'on suppose indépendants.
Pour $i \geq 1$, on note Y_i la variable aléatoire égale à $1,11$ si la i-ème pièce tombe sur pile et égale à $0,9$ si elle tombe sur face.

5) Calculer l'espérance $E(Y_i)$ pour $i \geq 1$.

On note $\Pi_0 = 100$ le montant initial et Π_n le montant obtenu après n lancés.

6) a) Pour $n \geq 1$, exprimer Π_n en fonction des Y_i, $i \geq 1$.
   b) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E(\Pi_n)$.

On note $\alpha = -E(\ln(Y_1))$.

7) a) Montrer que $\alpha > 0$.
   b) Montrer que $P(\Pi_n \leq 100\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
8) a) En quoi ce second jeu peut-il paraitre paradoxal ?
   b) Si vous aviez le choix, préféreriez-vous jouer au premier jeu ou au second ? Justifier brièvement votre réponse.

⋆ ⋆

Exercice 3 **Voir correction**

Soit N un entier naturel non nul. On lance N fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile et Y le nombre de faces obtenus.

1) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$, où $\rho(X, Y)$ désigne le coefficient de corrélation entre X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
2) On suppose dans cette question que N suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3) On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Déterminer les lois de X et Y.
   b) Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$
   c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆⋆⋆

Exercice 4 — Voir correction

On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions p, q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtention pour la deuxième fois d'une boule bleue. On note X le nombre de tirage effectués et Y le nombre de boules jaunes obtenus lors de cette série de tirages.

1) Montrer que la probabilité de n'obtenir qu'au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirage est nulle. Qu'en déduit-on ?
   Préciser la loi de X.
2) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel a vérifiant $|a| < 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+1}}$
3) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$, on note V la variable aléatoire définie par $V = \frac{1}{\sqrt{U}}$.

1) a) Justifier que V est à valeurs dans $[1, +\infty[$.
   b) Montrer que la fonction de répartition de V est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

   c) En déduire que V est une variable aléatoire à densité, et donner une densité f_V de V.
2) Déterminer si V admet une espérance et une variance, calculer leurs valeurs éventuelles.

La variable aléatoire V suit une **loi de Pareto**. Cette loi est utilisée par les compagnies d'assurance pour modéliser les montants des sinistres. Afin d'établir dse prévisions, un actuaire étudie une suite $(V_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V, la variable aléatoire V_i représente le coût du i-ème sinistre survenu à partir d'un instant donné.

On suppose que le nombre de sinistres se produisant au cours d'une année est donné par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On s'intéresse au nombre de sinistres dont le coût dépasse un certain montant $A > 1$. On note ainsi T la variable aléatoire égale au nombre d'léments de $(V_1, ..., V_N)$ prenant une valeur supérieure à A, formellement :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = |\{i \in [\![1, N(\omega)]\!] ; V_i(\omega) > A\}|$$

où la notation $|\cdot|$ désigne le cardinal.

3) Exprimer $P(N = n)$ pour tout $n \in N(\Omega)$.
4) Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T ?
5) Justifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout k dans $\mathbb{N}$ on a :

$$P_{[N=n]}(T = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A}\right)^{2k} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

6) Calculer $P(T = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis reconnaître la loi de T.
7) En moyenne, combien de sinistres avec un coût supérieur à A surviennent en un an ?

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(U=i, V=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(U=i)\mathbb{P}(V=k-i) && \text{car } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\alpha}\,\frac{\alpha^i}{i!}\,\mathrm{e}^{-\beta}\,\frac{\beta^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!\alpha^i\beta^{k-i}}{k!i!(k-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\alpha^i\beta^{k-i} \\
&= \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\,\frac{(\alpha+\beta)^k}{k!} && \text{d'après la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

donc X suit bien une loi de Poisson de paramètre $\alpha+\beta$.
De même, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\beta+\gamma$.

2) $\mathrm{Cov}(U+V, V+W) = \mathrm{Cov}(U,V) + \mathrm{Cov}(U,W) + \mathrm{Cov}(V,V) + \mathrm{Cov}(V,W) = \mathrm{Cov}(V,V) = V(V) = \beta$ car U,V et W sont indépendantes et car V suit une loi de Poisson de paramètre β.

Correction de l'exercice 2 :

1) $E(X_i) = \frac{1}{2}\times 11 + \frac{1}{2}\times(-10) = \dfrac{1}{2}$

2) a) Pour $n \geq 1$, $S_n = 100 + \sum_{i=1}^{n} X_i$
   b) Il y a 4 cas tous équiprobabile pour les 4 valeurs possibles du couple (X_1, X_2).
   Si $X_1 = X_2 = 11$, alors $S_2 = 122$.
   Si $X_1 = 11$ et $X_2 = -10$, ou $X_1 = -10$ et $X_2 = 11$, alors $S_2 = 101$
   Si $X_1 = X_2 = -10$ alors $S_2 = 80$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S_2 = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = 101 \\ \frac{1}{4} & \text{si } k \in \{80, 122\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   c) Pour tout $n \geq 1$, on a par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = 100 + \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 100 + \frac{n}{2}$.
   Pour $n = 0$, $E(S_0) = E(100) = 100$ donc la formule ci-dessus est encore valable pour $n = 0$.

3) a) S_{10} est une variable aléatoire finie donc admet une espérance. Elle est positive car dans le pire des cas on perd 10 fois et le montant obtenu à l'issu des lancers est 0, dans les autres cas le montant obtenu est strictement positif.
   On peut donc appliquer l'inégalité de Markov :

$$P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{E(S_{10}}{160}$$

   Or $\dfrac{E(S_{10}}{160} = \dfrac{105}{160} = \dfrac{21}{32} = \dfrac{63}{96} < \dfrac{64}{96} = \dfrac{2}{3}$, donc on a bien :

$$P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{2}{3}$$

   b) On a :

$$P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) = P(S_n - 100 - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{4})$$

$$= P(S_n - E(S_n) \geq -\frac{n}{4})$$
$$= 1 - P(S_n - E(S_n) < -\frac{n}{4})$$

Or, $[S_n - E(S_n) < -\frac{n}{4}] \subset [|S_n - E(S_n)| > \frac{n}{4}]$ donc $P(S_n - E(S_n) < -\frac{n}{4}) \leq P(|S_n - E(S_n)| > \frac{n}{4})$. S_n est finie donc admet une variance, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|S_n - E(S_n)| > \frac{n}{4} \leq \frac{V(S_n)}{(n/4)^2}$$

Calculons $V(S_n)$:

$$\begin{aligned} V(S_n) &= V\left(100 + \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= V(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) && \text{par propriété de la variance} \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) && \text{par indépendance des } X_i \\ &= n \times (E(X_i^2) - E(X_i)^2) \\ &= n \times \left(\frac{1}{2} \times 11^2 + \frac{1}{2} \times (-10)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{441n}{4} \end{aligned}$$

On en déduit grâce aux inégalités précédentes :

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) &\geq 1 - \frac{441n}{4(n/4)^2} \\ &\geq 1 - \frac{1664}{n} \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1664}{n}\right) = 1$ donc par encadrement (comme $P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) \leq 1$) on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) = 1$.

4) a) On ne s'arrête après un seul lancer que si on tire face au premier lancer, donc $P(T = 1) = \frac{1}{2}$.

b) Parmi les 4 valeurs possibles du couple (X_1, X_2) qui sont $(11, 11)$, $(11, -10)$, $(-10, 11)$ et $(-10, -10)$, seule $(-10, -10)$ donne $T = 2$. En effet, si X_1 vaut 11 le jeu s'arrête après un lancer seulement, et si $X_1 = -10$ et $X_2 = 11$ alors le jeu continuera pour au moins un troisième lancer.
On a donc $P(T = 2) = P([X_1 = -10] \cap [X_2 = -10])$.

c) On a vu dans la question précédente que le jeu durait trois lancers ou plus uniquement dans le cas où $X_1 = -10$ et $X_2 = 11$, et on a dans ce cas $S_2 = 101$.

d) On demande dans cette question $P_{(T\leq 3)}(S_T \geq 100)$.
Prolongeons le raisonnement de la question 4 b) pour le troisième lancer : pour parvenir à ce troisième lancer il faut nécessairement avoir $X_1 = -10$ et $X_2 = 11$. Si le troisième lancer donne face alors $X_3 = 11$ et $S_3 = 112 \geq 105$ donc le jeu s'arrête. Si le troisième lancer donne pile, alors $X_3 = -10$ et $S_3 = 91$ donc le jeu continue pour un quatrième lancer au moins.
Les cas où $T \leq 3$ sont donc $[X_1 = 11], [X_1 = -10] \cap [X_2 = -10]$, et $[X_1 = -10] \cap [X_2 = 11] \cap [X_3 = 11]$. Parmi ces trois cas, seules le premier et le dernier donnent $S_T \geq 100$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_{(T\leq 3)}(S_T \geq 100) &= \frac{P\big([X_1 = 11] \cup ([X_1 = -10] \cap [X_2 = 11] \cap [X_3 = 11])\big)}{P\big([X_1 = 11] \cup ([X_1 = -10] \cap [X_2 = -10]) \cup ([X_1 = -10] \cap [X_2 = 11] \cap [X_3 = 11])\big)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{7}$$

$$P_{(T\leq 3)}(S_T \geq 100)$$

e) Pour s'arrêter à un rang n avec un montant égal à 105, il faut nécessairement que le montant au rang $n-1$ soit égal à 94, c'est à dire $S_{n-1} = 94$ (sinon on se serait arrêté avant avec un montant supérieur à 105)
Si $S_{n-1} = 94$, alors S_{n-2} vaut nécessairement 104 (sinon on se serait arrêté avant avec un montant inférieur à 89).
On peut refaire ce raisonnement 4 fois pour parvenir $S_{n-9} = 90$ puis $S_{n-10} = 100$.
Si $S_{n-10} = 100$, alors c'est nécessairement l'état initial. En effet on ne peut pas parvenir à $S_{n-10} = 100$ ni en partant de $S_{n-11} = 89$ ni en partant de $S_{n-11} = 110$ car cela voudrait dire qu'on s'est arrêté de jouer avant d'atteintdre le rang $n-10$.
La seule façon de s'arrêter avec un montant égal à 105 est donc d'enchaîner cinq successions de pile puis face, ce qui arrive ave probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$.

5) Pour tout $i \geq 1$, $E(Y_i) = \frac{1}{2} \times 1,11 + \frac{1}{2} \times 0,9 = 1,005$.

6) a) À l'issu du i-ème lancer on multiplie le montant obtenu par Y_i. Pour tout $n \geq 1$ on a donc $\Pi_n = 100 \times \prod_{i=1}^n Y_i$.
b) Pour tout $n \geq 1$ on a $E(\Pi_N) = 100E\left(\prod_{i=1}^n Y_i\right) = 100\prod_{i=1}^n E(Y_i) = 100\times(1,005)^n$ par indépendance de $Y_1, ..., Y_n$.

7) a) Pour tout $i \geq 1$, on a d'après le théorème de transfert :

$$E(\ln(Y_i)) = \ln(1,11) \times \frac{1}{2} + \ln(0,9) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln(1,11) + \ln(0,9)) = \frac{1}{2}\ln(1,11 \times 0,9) = \frac{1}{2}\ln(0,999)$$

et comme $0,999 < 1$ on a $\ln(0,999) < 0$ donc $-E(\ln(Y_i)) > 0$.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, Π_n est positive comme produit de termes positifs. De plus, c'est une variable aléatoire finie donc elle admet une espérance. Pour tout entier $n \geq 1$ on a donc :

$$\begin{aligned}
P(\Pi_n \leq 100\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}) &= P(\prod_{i=1}^n Y_i \leq \mathrm{e}^{-\alpha}\, 2n) \\
&= P(\sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \leq -\frac{\alpha}{2}n) \\
&= P(\left(\sum_{i=1}^n \ln(Y_i) + n\alpha \leq \frac{\alpha n}{2}\right) \\
&= P\left(U_n - E(U_n) \leq \frac{\alpha n}{2}\right) && \text{avec } U_n = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \\
&= 1 - P\left(U_n - E(U_n) > \frac{\alpha n}{2}\right)
\end{aligned}$$

or $P(U_n - E(u_n) > \frac{\alpha n}{2}) \leq P(|U_n - E(U_n)| > \frac{\alpha n}{2})$ par inclusion des événements, et $P\left(|U_n - E(U_n)| > \frac{\alpha n}{2}\right) \leq \frac{V(U_n)}{(\alpha n/2)^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. En reprenant l'inégalité précédente on a donc :

$$\begin{aligned}
P(\Pi_n \leq 100\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}) &\geq 1 - \frac{V(U_n)}{(\alpha n/2)^2} \\
&\geq 1 - \frac{4nV(\ln(Y_1))}{n^2} && \text{car } \ln(Y_1), ..., \ln(Y_n) \text{ sont indépendantes et de même loi}
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{4V(\ln(Y_1))}{n}\right) = 1$ on en déduit par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\Pi_n \leq 100\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}\right) = 1$.

8) a) Ce second jeu peut paraître paradoxal car son espérance tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, mais la probabilité de tout perdre (car $100\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n} \to 0$) est de plus en plus grande.

b) Cela dépend du nombre de lancer et de la tolérance au risque, par exemple pour un seul lancer les deux jeux sont identiques, pour un faible nombre de lancer il y a encore une probabilité raisonnable de gagner dans le second jeu, avec une espérance un peu plus avantageuse. Pour un grand nombre de lancer en revanche il devient préférable de choisir le premier jeu qui offre un gain plus sûr.

Correction de l'exercice 3 :

1) X suit une loi binomiale de paramètres N et $p = \dfrac{1}{2}$ donc $V(x) = Np(1-p) = \dfrac{N}{4}$, et on a $Y = N - X$ donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, N-X) = \mathrm{Cov}(X,N) - \mathrm{Cov}(X,X) = 0 - V(X) = -\dfrac{N}{4}$

Y suit la même loi que X donc, $V(Y) = V(X) = \dfrac{N}{4}$. Ainsi, $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{-N/4}{N/4} = -1$.

X et Y ne sont pas indépendantes, si elles l'étaient on aurait $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, or $-\dfrac{N}{4} \neq 0$.

2) a) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}(X=0|N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b) On a $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = \dfrac{1}{3}$ par symétrie du problème, pourtant $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0$ car $N \geq 1$ donc on lance au moins une fois la pièce. Ainsi, $\mathbb{P}(X=0,Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=0)$.

3) a) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}(X=k|N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k! 2^k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)! 2^{n-k}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda/2} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

donc X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{2}$. De même, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{2}$.

b) X et Y suivent des lois de Poisson donc admettent un moment d'ordre 2, donc d'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \dfrac{\lambda^2}{4}$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} ij\mathbb{P}(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} ij\mathbb{P}(X=i, N=i+j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} ij\mathbb{P}(N=i+j) \times \mathbb{P}(X=i|N=i+j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} ij\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}\frac{1}{2^{i+j}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i\lambda^i}{2^i i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\lambda^j}{2^j j!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i\lambda^i}{2^i i!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{2^j (j-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i\lambda^i}{2^i i!}\frac{\lambda}{2}\sum_{j'=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/2)^{j'}}{j'!} && \text{en posant } j' = j-1 \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda/2}\,\frac{\lambda}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i\lambda^i}{2^i i!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\times\mathrm{e}^{\lambda/2}\times\mathrm{e}^{\lambda/2}\times\frac{\lambda}{2}\times\frac{\lambda}{2} \\
&= \frac{\lambda^2}{4}
\end{aligned}$$

donc finalement $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

c) Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ donnés, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=i, Y=j) &= \mathbb{P}(X=i, N=i+j) \\
&= \mathbb{P}(N=i+j)\times\mathbb{P}(X=i|N=i+j) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}\frac{1}{2^{i+j}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{i+j}}{2^{i+j}i!j!}
\end{aligned}$$

et d'autre part : $\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j) = \mathrm{e}^{-\lambda/2}\,\dfrac{\lambda^i}{2^i i!}\times\mathrm{e}^{-\lambda/2}\,\dfrac{\lambda^j}{2^j j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^{i+j}}{2^{i+j}i!j!}$.

On a donc $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ et ce quel que soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, donc X et Y sont indépendantes.

Correction de l'exercice 4 :

1) La suite d'événements A_n : « au cours des n premiers tirages, au plus une boule bleue a été obtenue »est une suite décroissante d'événements. Le théorème de la limite monotone assure donc que $\mathbb{P}\left(\bigcap A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$.

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = nr(1-r)^{n-1} + (1-r)^n$ (c'est la probabilité de $(X \leq 1)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,r)$).
   Or, $\lim_{n\to+\infty}(nr(1-r)^{n-1} + (1-r)^n = 0$ par croissance comparée car $|1-r| < 1$, donc finalement $\mathbb{P}\left(\bigcap A_n\right) = 0$. La probabilité de jamais obtenir une deuxième boule bleue est donc nulle, on en déduit que les variables aléatoires X et Y sont bien définies.

X est à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ et pour tout $k \in [\![2;+\infty[$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{\binom{k-1}{1} r(1-r)^{k-2}}_{\text{probabilité de tirer exactement une boule bleue lors des } k-1 \text{ premiers tirages}} \times \underbrace{r}_{\text{probabilité de tirer une boule bleue lors du } k\text{-ème tirage}} = (k-1)r^2(1-r)^{k-1}$$

2) Soit a un réel vérifiant $|a|<1$. Notons d'abord que $k^2 \times \binom{n+k}{n} a^k = k^2 \times \dfrac{(n+k)\times(n+k-1)\times\cdots\times(k+1)}{k!} a^k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{k^{n+2}a^k}{k!}$ 0 donc $\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}a^k$ converge d'après le critère de Riemann.

Pour $n=0$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \dfrac{1}{1-a}$ (série géométrique), donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+0}{0}a^k = \dfrac{1}{(1-a)^{0+1}}$, la propriété est donc vraie pour $n=0$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier n quelconque. On a

$$\begin{aligned}
(1-a)\sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^k &= \sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^k - \sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^k - \sum_{k=1}^{p+1}\binom{k+n}{n+1}a^k\\
&= \binom{n+1}{n+1}a^0 - \binom{n+p+1}{n+1}a^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{k+n+1}{n+1} - \binom{k+n}{n+1}\right)a^k\\
&= 1 - \binom{n+p+1}{n+1}a^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{k+n}{n}a^k && \text{d'après la formule de Pas}
\end{aligned}$$

On a $\binom{n+p+1}{n+1}a^{p+1} = \dfrac{(n+p+1)(n+p)\cdots(p+1)}{(n+1)!}a^{p+1} \sim \dfrac{p^n a^p}{(n+1)!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
(1-a)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n+1}{n+1}a^k &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k+n}{n}a^k\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n}{n}a^k\\
&= \frac{1}{(1-a)^{n+1}} && \text{par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$. On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n}{n}a^k = \dfrac{1}{(1-a)^{n+1}}$.

3) $X(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}$

Si $(X=i)$ est réalisé, alors on a effectué i tirages dont deux sont des boules bleues, et les $i-2$ autres sont soit jaunes soit noires en proportion respective $\dfrac{p}{p+q}$ et $\dfrac{q}{p+q}$. Le nombre de boules jaunes obtenus suit sous cette condition une loi binomiale de paramètres $i-2$ et $\dfrac{p}{p+q} = \dfrac{p}{1-r}$.

Si $i-2<j$ on a $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=0$.

Pour tout $i\in[\![2;+\infty[\![$ et tout $j\in\mathbb{N}$ vérifiant $j\leq i-2$, on a donc donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=i,Y=j) &= \mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j|X=i)\\
&= (i-1)r^2(1-r)^{i-2}\times\binom{i-2}{j}\frac{p^j}{(1-r)^j}\times\frac{q^{i-2-j}}{(1-r)^{i-2-j}}\\
&= (i-1)r^2\binom{i-2}{j}p^jq^{i-2-j}
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=j+2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{i=j+2}^{+\infty} (i-1)r^2 \binom{i-2}{j} p^j q^{i-2-j} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} r^2(i+j+1)\binom{i+j}{j} p^j q^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} r^2(j+1)\binom{i+j+1}{j+1} p^j q^i && \text{en appliquant l'égalité } n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} \\
&= r^2(j+1)p^j \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+j+1}{j+1} q^i \\
&= \frac{(j+1)r^2p^j}{(1-q)^{j+2}} && \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= (j+1)\left(\frac{r}{1-q}\right)^2 \left(\frac{p}{1-q}\right)^j
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j) = 1$ pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé en appliquant la formule donnant la somme d'une série géométrique dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)\left(\frac{p}{1-q}\right)^j &= \frac{1}{\left(1-\frac{p}{1-q}\right)^2} \\
&= \frac{(1-q)^2}{(1-q-p)^2} \\
&= \frac{(1-q)^2}{r^2}
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j) = 1$

Correction de l'exercice 5 :

1) a) Pour tout ω dans Ω on a $U(\omega) \in]0,1]$ donc $0 < U(\omega) \leq 1$ donc $0 < \sqrt{U(\omega)} \leq 1$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{U(\omega)}} \geq 1$. On a donc bien $V(\Omega) \subset [1;+\infty[$.

b) La fonction de répartition F_U de U vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pour tout réel $x \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
P(V \leq x) &= P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right) \\
&= P\left(\frac{1}{U} \leq x^2\right) && \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0;+\infty[\\
&= P\left(U \geq \frac{1}{x^2}\right) && \text{car } U \text{ est à valeurs positives}
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} \qquad \text{car } 1 - \frac{1}{x^2} \in [0,1] \text{ comme } x \geq 1$$

et si $x < 1$ alors $P(V \leq x) = 0$ car V est à valeurs dans $[1; +\infty[$. On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) — F_V est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 1[$ car constante sur cet intervalle, et sur $[1; +\infty[$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^1$. Elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

— F_V est continue car $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 1[$ et sur $[1; +\infty[$. De plus $F_V(1) = 1 - \frac{1}{1^2} = 1$, et $\lim\limits_{x \to 1^+} F_V(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} F_V(x) = 1 = F_V(1)$, donc F_V est continue à droite et à gauche en 1 donc continue en 1. Finalement F_V est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

— $\lim\limits_{x \to -\infty} F_V(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_V(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ par opérations.

On en conclut que F_V est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, donc V est à densité est une densité de V est donnée sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par F_V' :

$$\forall x \geq 1, \quad F_V'(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{et} \quad \forall x < 1, \quad F_V'(x) = 0$$

donc la fonction f_V définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_V(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est une densité de V.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

3) Le cardinal de $\{i \in [\![1, N(\omega)]\!]; V_i(\omega) > A\}$ est un entier compris entre 0 et $N(\omega)$, et N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc T est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si on suppose que l'événement $[N = n]$ est réalisé, alors on peut considérer que N est fixé et égal à n donc la variable aléatoire T compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes dont le i-ème succès est $(V_i > A)$. Ces événements ont même probabilités car les variables $(V_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi, et sont indépendants car les variables $(V_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ le sont.
Ainsi, T suit une loi binomiale de paramètres n et $p = P(V_i > A) = 1 - F_{V_i}(A) = 1 - (1 - \frac{1}{A^2}) = \frac{1}{A^2}$.
On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_{[N=n]}(T = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A}\right)^{2k} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k > n, \quad P_{[N=n]}(T = k) = 0$$

5) Soit k un entier naturel fixé. La famille d'événements $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(T = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) \times P_{[N=n]}(T = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A}\right)^{2k} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k}{A^{2k}} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{k!(n-k)!} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k}{A^{2k} k!} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda - \frac{\lambda}{A^2}\right)^{n'}}{n'!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda - \frac{\lambda}{A^2}} \lambda^k}{A^{2k} k!} && \text{en reconnaissant une série exponentielle}
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{A^2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}$$

donc T suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{A^2}$.